

Introdução à Filosofia da Mecânica Quântica

aula 02

A Formulação via Espaços de Hilbert

Décio Krause

<https://sites.google.com/view/krausedecio>
deciokrause@gmail.com

23 Setembro 2025



- ~~Aula 01 – 09 Set – Apresentação: ideias básicas. (Slides no site da ABF)~~
- **Aula 02 – 23 Set** – Uma formulação da MQ usando espaços de Hilbert.
- **Aula 03 – 07 Out** – Alguns experimentos cruciais: Stern-Gerlach, Mach-Zehnder, o gato de Schrödinger, dupla fenda, HOM, etc.
- **Aula 04 – 21 Out** – Algumas interpretações: Copenhagen, Bohm, Muitos Mundos.
- **Aula 05 – 04 Nov** – Lógica, filosofia e pseudo-ciência.

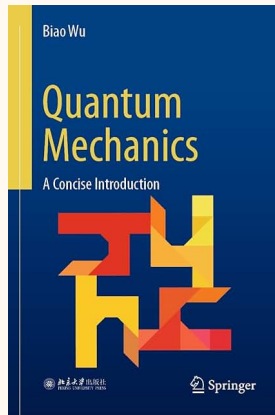
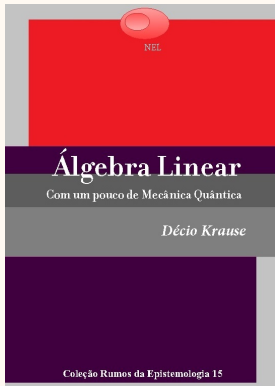
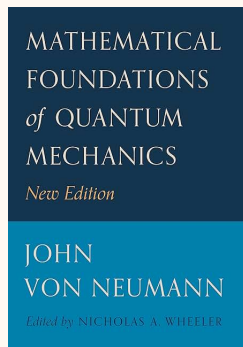


Figure: Krause 2016 (<https://issuu.com/nel.rumos/docs/rumos15>), Wu 2020

- Denominamos de **Teoria Quântica (TQ)** um grupo de teorias que envolvem:
 - A **MQ** ou Mecânica Quântica não relativista
 - A **MQR** ou Mecânica Quântica relativista (envolvendo a Relatividade Restrita)
 - Outras teorias associadas, como o Modelo Padrão da Física de Partículas
 - Todas, com exceção da primeira, são **teorias de campos**
 - Ficaremos com a **MQ**
- Há vários modos de formular a MQ: via Espaços de Hilbert (que adotaremos), via Integrais de Caminho, etc.
- **Espaço de Hilbert** - Conceito criado por John von Neumann em 1932 a partir da generalização de certos espaços que eram estudados por Hilbert.



(a) 1932

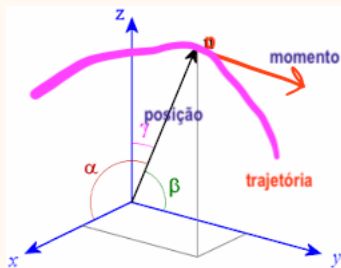


(b) 2018

A Mecânica Clássica

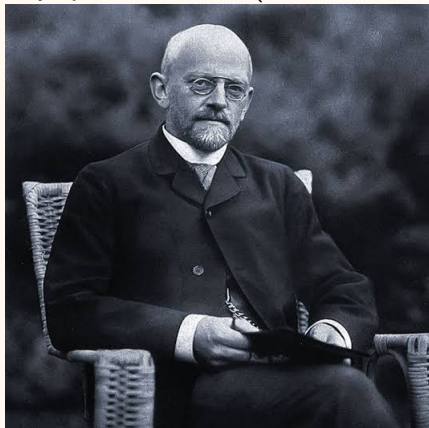
Como antes, detalhes em [Aspectos da Física Clássica](#)

- O principal interesse recai sobre o **estado** do sistema físico.
- O **estado** de um sistema físico é descrito por um vetor no $\mathbb{R}^6$, denominado de **espaço de fases**, da forma $p = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ ou $p = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, onde os q_i são as coordenadas de posição do "ponto" p e os p_j são as coordenadas de momento.
- Para um sistema com N sistemas, os estados habitam o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{6N}$.



- Observáveis expressam aquilo que pode ser medido em um sistema em certo estado, como **posição**, **momento**, **energia cinética**, etc.
- São funções que associam conjuntos de pontos do espaço de fases a números reais. Dado um desses conjuntos, A , e um observável f , o número real $f(p)$, com $p \in A$, é interpretado como sendo o **valor** da medida do observável f para o sistema p .
- As equações de Newton fornecem o modo como os estados variam no tempo, e cada ponto p descreve uma **trajetória** no espaço de fases.
- A evolução é **determinista**: dadas as condições iniciais para um tempo t_0 , ou seja, dado $p = (q(t), p(t))$, pode-se determinar com precisão (dependendo dos aparelhos de medida) a posição do ponto em qualquer outro tempo $t \neq t_0$.

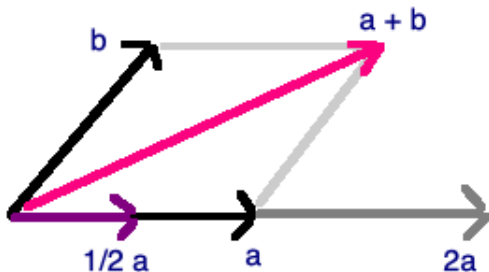
- Os **estados** de um sistema físico são descritos por **vetores** em um **Espaço de Hilbert** (detalhes são deixados de lado).



David Hilbert (1862-1943)

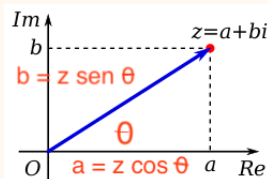
Espaços de Hilbert

- Os **vetores** são denotados por (notação de Dirac) $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$, etc. (ditos **kets**)
- Vetores podem ser somados ou multiplicados por uma constante:



Espaços de Hilbert

- Vetores que diferem por uma **fase** denotam o mesmo estado: $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta} |\psi\rangle$, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária.
- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- Números complexos da forma $z = x + iy$ entram essencialmente na MQ.
- Não parece possível desenvolver a MQ somente com números reais.
- Para os fenômenos ondulatórios, os números complexos simplificam muito.



Por que números complexos?

Como veremos, a **evolução** do vetor de estado, descrito pela **função de onda** $|\psi(x, t)\rangle$ é dado pela **Equação de Schrödinger** (ES)

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(x, t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(x, t)\rangle$$

- O número complexo i entra **necessariamente** na descrição dada pela MQ.
- $\hbar$ é a constante de Planck e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ é a **constante reduzida de Planck**.
- ES unidimensional:

$$i\hbar |\psi(x, t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 |\psi(x, t)\rangle}{\partial x^2} + V(x, t) |\psi(x, t)\rangle .$$

- Não se aplica para partículas com $m = 0$, como fótons. Para eles, a MQ **relativista**.

Como veremos, a **evolução** do vetor de estado, descrito pela **função de onda** $|\psi(x, t)\rangle$, é dada pela **Equação de Schrödinger (ES)**

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(x, t)\rangle}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) |\psi(x, t)\rangle.$$

- O Hamiltoniano é

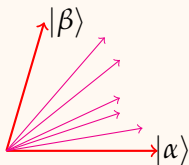
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t).$$

Vetores e superposições

- $\mathcal{V}$: conjunto de **vetores**, $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$, ...
- K é um **corpo** cujos elementos são os **escalares**, aqui sempre $\mathbb{C}$:
 $a, b, \dots$
- Há uma **adição de vetores**, nos dando $\alpha + \beta$, etc.
- Há uma **multiplicação de vetor por escalar**, dando $a\alpha$, ...
- Podemos fazer **combinações lineares** de vetores (ou **superposições**):
 $a\alpha + b\beta$, etc.
- Notação de Dirac: $|\alpha\rangle$, $|\psi\rangle$, etc., ditos **kets**.
- Exemplo: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|\psi_2\rangle$.

Diferenças

- No caso clássico, podemos ter um *continuum* de valores possíveis para $|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$, dependendo dos valores de a e de b :



- No caso quântico, teremos somente dois valores: ou $|\alpha\rangle$ ou $|\beta\rangle$.
- Quanto de uma medição, o vetor de estado $|\psi\rangle$ **colapsa** em um ou em outro.
- $a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \Rightarrow |\alpha\rangle$ ou $|\beta\rangle$, tais que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (normalização).
- E só teremos uma probabilidade de ser um caso ou outro, nunca certeza.
- As probabilidades não são a medida de nossa ignorância, mas entram de modo essencial.

Produtos, norma, ortogonalidade

- **Produto interno** Entre $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$:

$$\langle\psi|\phi\rangle$$

("brackets") (é um **escalar**). Se $\langle\psi|\phi\rangle = 0$, os vetores são **ortogonais**.

Separar entre 1 e 2, entre o que está no **bra** e o que está no **ket**:

$$\underbrace{\langle\psi|}_1 \underbrace{|\phi\rangle}_2$$

- **Propriedades:** (números complexos)
 - $\langle\alpha + \gamma|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle + \langle\gamma|\beta\rangle$
 - $\langle a\alpha|\beta\rangle = a\langle\alpha|\beta\rangle$
 - $\langle\alpha|b\beta\rangle = \bar{b}\langle\alpha|\beta\rangle$ (complexo conjugado: $b = x + yi$, $\bar{b} = x - yi$).
 - $\langle\alpha|\beta\rangle = \overline{\langle\beta|\alpha\rangle}$ (complexo conjugado)
 - $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ e $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0$ se $\alpha = 0$ (vetor nulo).

Exemplos importantes

- Produto interno **canônico** sobre o $\mathbb{R}^2$: sendo $\alpha = (x_1, y_1)$ e $\beta = (x_2, y_2)$, temos

$$\langle \alpha | \beta \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

- Produto interno **canônico** sobre o $\mathbb{C}^2$: sendo $\alpha = (x_1, y_1)$ e $\beta = (x_2, y_2)$ (números complexos), temos

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \overline{x_1} x_2 + \overline{y_1} y_2.$$

- Onde $\overline{x} = a - bi$ se $x = a + bi$.

- **Norma** (ou **comprimento**) de um vetor α escrito $\|\alpha\|$,

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

- **Vetor unitário:** $\|\alpha\| = 1$; α e β são **ortonormais** se forem ortogonais e unitários.
- **Produto tensorial** Entre espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, escrito $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.
- Seus vetores são da forma $\alpha \otimes \beta$, com $\alpha \in \mathcal{V}$ e $\beta \in \mathcal{W}$
- Notação de Dirac: $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, ou $|\alpha\rangle |\beta\rangle$ ou ainda $|\alpha, \beta\rangle$

- Uma **base** para $\mathcal{V}$ é um conjunto de vetores tal que (1) todo vetor de $\mathcal{V}$ é combinação linear de seus vetores (eles **geram** o espaço) e (2) nenhum deles é combinação linear dos demais (são **linearmente independentes**). A **dimensão** do espaço é o cardinal de uma de suas bases (todas têm o mesmo número de elementos).
- **Exemplo:** $\mathbb{R}^2$
- Uma base (a "canônica") é formada por $|e\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|e\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Qualquer vetor $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ pode ser escrito como uma combinação linear (superposição): $|\psi\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 c_i |e\rangle_i$.

Base e dimensão

- Se $\mathcal{V}$ tem produto interno, há **bases ortogonais** e **bases ortonormais**; essas serão importantes depois.
- Seja $\mathcal{B} = \{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle\}$ base **ortonormal** para $\mathcal{V}$. Se $\beta \in \mathcal{V}$, existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tais que

$$|\beta\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\alpha_i\rangle.$$

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{delta de Kronecker}} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- É fácil ver que $c_i = \langle \alpha_i | \beta \rangle$, logo

$$|\beta\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i | \beta \rangle |\alpha_i\rangle. \quad (1)$$

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (ket)}$$

$$\langle\psi| = (\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}) \text{ (bra)}$$

$\bar{x}$ é o conjugado de x .

Produto linha $\times$ coluna:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z$$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{x}x + \bar{y}y + \bar{z}z = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = \|\varphi\|^2$$

- Um **operador linear** sobre $\mathcal{V}$ é uma função $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que:
 - $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
 - $T(a\alpha) = aT(\alpha)$
- Os operadores são representados (relativamente a uma base) por **matrizes**. Pode-se confundi-los com elas.
- Exemplos notáveis:
 - **Operador ortogonal** (sobre $\mathcal{V}$ real com produto interno): é um operador linear T tal que $\|T|\psi\rangle\| = \|\psi\|$, para todo $|\psi\rangle$.
 - **Operador unitário**: o mesmo só que sobre $\mathcal{V}$ complexo.
 - Se A é matriz de T ortogonal, $A^{-1} = A^T$ (transposta de A) e se T é unitário, $A^{-1} = A^*$ (transposta conjugada).
 - Se $A = A^*$, então T é **hermitiano**.
 - Na MQ, os observáveis físicos são representados por operadores hermitianos.

- Na física clássica, conhecer o **estado** de um sistema (posição e momento em um dado tempo) permite conhecer tudo o que é necessário para **determinar** o estado do sistema em qualquer outro instante de tempo.
- Na MQ, não há uma completa **predizibilidade**. Conhecer o estado de um sistema significa conhecer *o máximo que podemos saber* sobre como o sistema **foi preparado**.
- (Mais à frente discutiremos essa imprevisibilidade e as hipóteses feitas a respeito.)
- Tudo o que a teoria nos fornece são **probabilidades**, não como *medida da nossa ignorância* (física clássica), mas **de modo essencial**: é o que temos e é o que podemos alcançar.

Primeiro axioma

- (AXIOMA I) A cada sistema físico σ associamos um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\sigma$ (a referência a σ ficará em geral implícita).
- Os **estados** de σ são descritos por vetores (em geral unitários) de $\mathcal{H}_\sigma$.
- Se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ denotam estados de σ , então qualquer combinação linear $a|\psi\rangle + b|\phi\rangle$ também denota um estado, com a e b números complexos.
- Uma coisa importante: **nunca mais** falaremos dos sistemas físicos, mas só de seus estados e dos observáveis, além de probabilidades e outras coisas.
- A referência aos sistemas físicos e à sua natureza vêm com as **interpretações**, das quais falaremos.

Primeiro AXIOMA, cont.

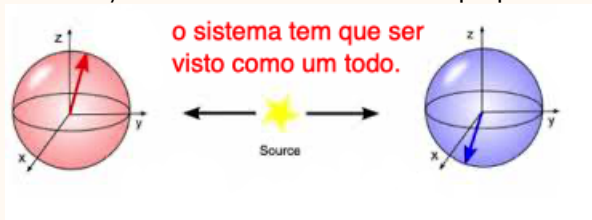
- (AXIOMA I') Para sistemas compostos de N *quanta*, o espaço de Hilbert é o **produto tensorial** dos espaços de cada sistema:
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N.$
- Os vetores de $\mathcal{H}$ são **kets** da forma $|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \dots |\psi_N\rangle$ ou somente $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle$, omitindo os ' $\otimes$ '.
- Se os sistemas forem todos **indiscerníveis**, então $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_j$.
- **Exemplo** Para os dois elétrons de um átomo de He (estado fundamental):

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_1^\uparrow\rangle |\psi_2^\downarrow\rangle - |\psi_1^\downarrow\rangle |\psi_2^\uparrow\rangle \right)$$

- 1 Schrödinger 1935 - "A" característica distintiva da MQ, sem análogo na MC.
- 2 Dois sistemas #1 e #2, cujos estados estão nos H-espços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.
- 3 Os estados do sistema conjunto #1 está no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- 4 $|\psi_{12}\rangle = N \left(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \pm |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \right)$ (o produto tensorial não é comutativo); N = fator de **normalização**.
- 5 Não é possível decompor este estado em um vetor em cada espaço.
- 6 Só podemos conhecer as propriedades do todo, de #1 e não de cada sistema em isolado: **holismo**.

Emaranhamento, holismo

Não é possível atribuir propriedades para os sistemas isoladamente *antes* de uma medição. Só o sistema **todo** tem propriedades.

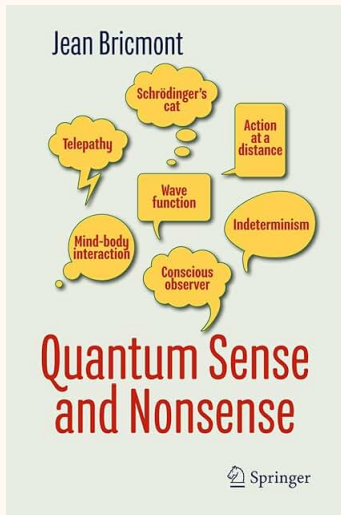


Estado do sistema 1: $|\psi\rangle_1$

Estado do sistema 2: $|\psi\rangle_2$

Estado do sistema conjunto: emaranhado, sem possibilidade de *fatorização*

$$|\psi\rangle_{12} = \alpha |\psi\rangle_1 + \beta |\psi\rangle_2$$



- ❶ 11 *The Cultural Impact of Quantum Mechanics*
- ❷ 11.2 *Quantum Mechanics and Pseudo-science*
- ❸ 11.3 *Quantum Mechanics and Eastern Mysticism*
- ❹ 11.4 *Quantum Mechanics and God*
- ❺ 11.5 *Quantum Mechanics and Philosophy*
- ❻ 11.5.1 *Quantum Mechanics and the “Mind-Body Problem”*
- ❼ 11.5.2 *Quantum Mechanics and “Positivism”*
- ❽ 11.5.3 *Quantum Mechanics and “Postmodernism”*
- ❾ 11.6 *Quantum Mechanics, Ideology and Politics*
- ❿ 11.6.1 *Quantum Mechanics and Marxism*
- ⓫ 11.6.2 *Quantum Mechanics and the Cold War Mentality*
- ⓬ 11.7 *‘Abuses’ of Quantum Mechanics in the Human Sciences*
- ⓭ 11.8 *A Plea for Modesty and for a Separation of Domains*

- Spin na direção z para férmions com idênticas probabilidades:

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_1^\uparrow\rangle |\psi_2^\downarrow\rangle - |\psi_1^\downarrow\rangle |\psi_2^\uparrow\rangle \right)$$

- Para uma dada **direção**, a propriedade **spin** assume um dentre dois valores: **UP** ($\uparrow$) ou **DOWN** ($\downarrow$).
- Esse vetor está dizendo que, previamente a uma medição de spin, o sistema se encontra no estado $|\psi_{12}\rangle$, que é uma **superposição** (emaranhamento) de estados.
- Como veremos mais abaixo, quando uma medição é realizada, esse vetor **colapsa** (AXIOMA 5) em um dos estados componentes, ou $|\psi_1^\uparrow\rangle |\psi_2^\downarrow\rangle$ ou $|\psi_1^\downarrow\rangle |\psi_2^\uparrow\rangle$
- E **só então** poderemos saber como está o spin de cada sistema.
- Como $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplica ambos os estados, cada um deles poderá ocorrer com probabilidade $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, ou 50%.

Segundo AXIOMA

- **Definição:** Um vetor $|\psi\rangle$ é um **autovetor** de um operador T se ele se transforma em um múltiplo escalar dele mesmo, ou seja, existe um escalar λ tal que

$$T |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle .$$

- O escalar λ é dito ser um **autovalor** de T associado ao autovetor $|\psi\rangle$.
- **(AXIOMA II)** Cada propriedade física A (energia, posição, momento, spin), chamada de **observável**, é representada por um operador hermitiano $\hat{A}$ sobre $\mathcal{H}$. Os autovalores de $\hat{A}$ (que são números reais) são os **valores possíveis** de serem obtidos em uma *medição* da propriedade física para o sistema no estado $|\psi\rangle$.
- O conjunto desses autovalores é chamado de **espectro** de T .

Um exemplo: spin

- O **spin** é um tipo de *momento angular* de um sistema quântico. Pode ser medido sempre em uma dada direção e os valores alcançáveis são sempre **um** ou **outro**.
- Geralmente adota-se a direção z como referência, assim temos σ_z , que pode ser $|\uparrow\rangle$ (UP) ou $|\downarrow\rangle$ (DOWN).
- Na direção x , temos σ_x que pode ser $|\leftarrow\rangle$ (LEFT) ou $|\rightarrow\rangle$ (RIGHT).
- Similarmente em outras direções.
- **Definimos** Denotamos por σ_d o operador que “mede” o spin do sistema na direção d . Então

$$\sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \text{ e } \sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$$

- O espectro: $\sigma_z = \{1, -1\}$.

Espectro contínuo

- Há operadores que têm um **espectro contínuo**, como **posição**, **momento** e **energia**.
- Vamos para espaços de Hilbert **modificados** (*rigged*).
- Nesse caso, substituímos $\sum$ por $\int$: por exemplo,

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) \psi(x) dx.$$

- $\varphi^*(x)$ é a conjugada complexa de $\psi(x)$.
- Ficaremos restritos ao caso finito.

A função de onda $|\psi\rangle$

- A função de onda é um elemento chave na formulação da MQ. Ela descreve o **estado** de um sistema físico quântico, que pode ser composto por muitos sistemas e assume-se que ela fornece **toda** a informação que se pode ter sobre o tal estado.
- Ela pode ser representada por um vetor $|\psi\rangle$ ou $|\psi(x, t)\rangle$ de um espaço de Hilbert (em geral) a infinitas dimensões.
- Está presente na Equação de Schrödinger

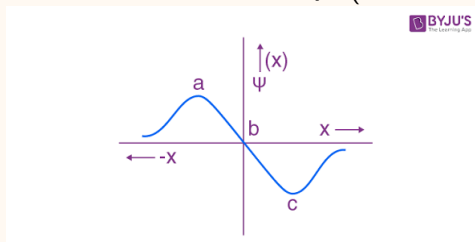
$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle .$$

A função de onda $|\psi\rangle$

- Para uma partícula de massa m deslocando-se na direção do eixo x , a equação é

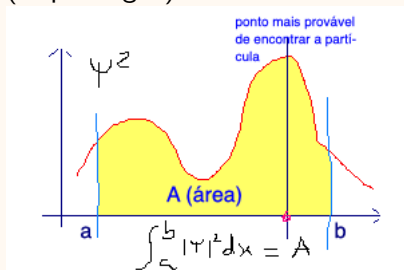
$$i\hbar \frac{d|\psi(x, t)\rangle}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 |\psi(x, t)\rangle}{\partial x^2} |\psi(x, t)\rangle + V(x, t) |\psi(x, t)\rangle .$$

- Repare que não podemos ter $m = 0$, logo a equação não se aplica a partículas sem massa, como fótons.
- Esses são tratados na MQR (relativista).

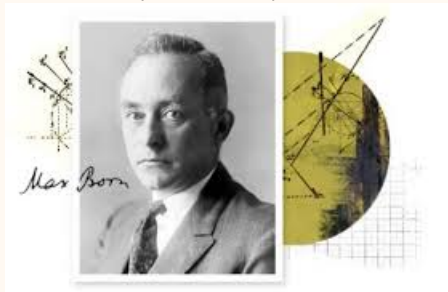


O quadrado da função de onda

- O seu quadrado, $|\psi|^2$ foi interpretado por Born como indicando a **probabilidade** de encontrarmos o sistema no ponto x no instante t . O ponto de máximo em $[a, b]$ é onde é **mais provável** que a partícula esteja.
- Mas cuidado: um sistema quântico não tem **posição** bem definida (Copenhague).



- Max Born (1882-1970), Nobel 1954.



Professor de Heisenberg, Pauli, Jordan e outros. Um dos formuladores da **mecânica de matrizes** (inventada por Heisenberg). Responsável pela interpretação do quadrado da função de onda, $|\psi|^2$.

- Avô de Olivia Newton-John.

Olivia Newton-John

(1948-2022)



Terceiro AXIOMA

- (AXIOMA III) - **Regra de Born** Dado

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\alpha_i\rangle .$$

com $\{\alpha_i\}$ uma base ortonormal e sendo $\hat{A}|\alpha_i\rangle = \lambda_i |\alpha_i\rangle$, então

$$Prob_A^{|\psi\rangle} = \sum_{j|\lambda_i=\lambda_j} |c_i|^2 = \sum_{j|\lambda_i=\lambda_j} |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2.$$

- No caso não degenerado (todos os λ_i são distintos), temos

$$Prob(\lambda_i)_A^{|\psi\rangle} = |c_i|^2 = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2.$$

- Praticamente **nunca** o cientista realiza uma só medição, mas várias (até centenas) delas.
- Há que se encontrar uma espécie de **média** dos resultados alcançados, e isso é feito por meio da **esperança matemática** ou **valor esperado**.
- No nosso caso, o *valor esperado da medida do observável A para o sistema no estado $|\psi\rangle$* é:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle,$$

que é o produto interno de $|\psi\rangle$ por $\hat{A}|\psi\rangle$.

- **(AXIOMA IV) - Evolução** A evolução do estado de um sistema quântico é **determinista** e descrita pela **equação de Schrödinger**.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \mathbf{H} |\psi\rangle ,$$

onde **H** é um operador linear, o **Hamiltoniano**, que descreve a energia do sistema.

Quinto AXIOMA: indeterminismo

- (AXIOMA V) - **Colapso** Via de regra, o estado de um sistema está descrito por uma **superposição de estados**, da forma

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + \dots + a_i |\psi_i\rangle + \dots$$

Quando uma medição de algum observável A é feita, temos

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + \dots + a_i |\psi_i\rangle + \dots)$$

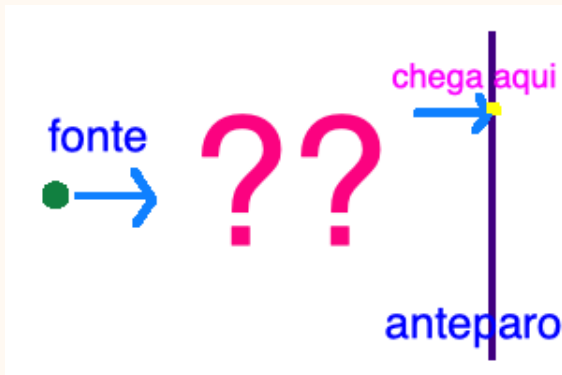
e acontece o **colapso** do vetor $|\psi\rangle$ para um dos seus **auto-estados** $|\psi_i\rangle$:

$$|\psi\rangle \implies |\psi_i\rangle$$

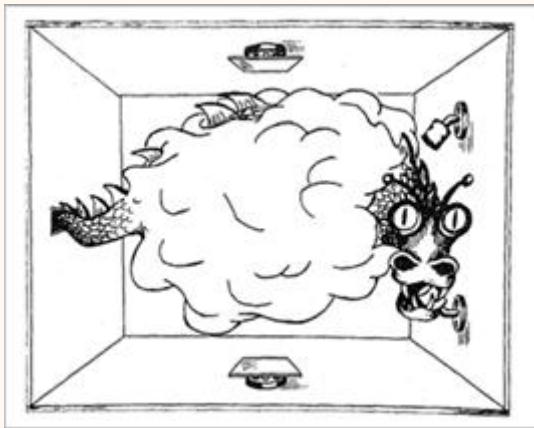
com probabilidade $|a_i|^2$. Tudo o que a teoria fornece são as probabilidades do estado entrar em algum auto-estado: só podemos conjecturar, não podemos assertar. (Roger Penrose, Nobel em Física, 2020).

Um exemplo

Experimento das duas fendas com um só elétron: onde ele vai 'bater' no anteparo? Não dá para saber; tudo o que temos são as probabilidades, e saberemos somente quando ele chegar ao anteparo.



O dragão de fumaça



John Archibald Wheeler (1911-2008): É possível ver a cauda, a fonte das partículas, e a cabeça, que são os resultados da medição. No meio, todo o corpo está coberto de fumaça. E essa fumaça não pode ser removida: somente a medição define o fenômeno, e não o contrário.

- 1 O *spin*, uma espécie de momento angular, foi descoberto em 1922 (Stern e Gerlach, experimento não explicável, apenas que havia um efeito de *assumir um dentre dois valores* devido ao efeito magnético) e 1925 (Uhlenbeck e Goudsmit propuseram a existência de um *momento angular intrínseco*, ou **spin**). Veremos isso na próxima aula.
- 2 O spin é **quantizado**. Quando medido *em uma direção*, pode assumir somente um dentre dois valores: U (UP) ou D (DOWN), 0 ou 1, L (LEFT) ou R (RIGHT), etc.
- 3 Não é possível medir o spin em duas direções distintas de uma só vez.
- 4 Os **observáveis** S_z e S_x *não comutam*.
- 5 O fato de que há observáveis que não comutam origina uma das críticas à lógica clássica.
- 6 Vamos explicar (mais sobre lógica na última aula).

Falha da distributividade

- 1 Uma das leis básicas da lógica clássica (Booleana): a distributividade de $\wedge$ com relação a $\vee$:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

- 2 Em termos do spin de uma partícula e nas direções x e z .
- 3 Suponha que medimos S_z e achamos UP.
- 4 Não podemos medir na direção x , mas *sabemos* que $S_x = UP$ ou que $S_x = DOWN$. Ou seja,
- 5 $S_z(U) \wedge (S_x(U) \vee S_x(D))$
- 6 Apliquemos a distributividade:

Falha da distributividade

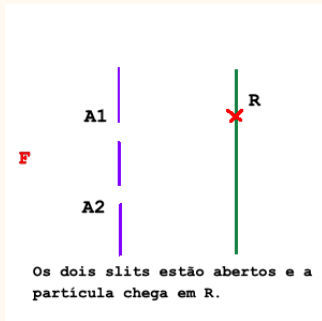
- ❶ $S_z(U) \wedge (S_x(U) \vee S_x(D))$
- ❷ Apliquemos a distributividade:
- ❸ $S_z(U) \wedge (S_x(U) \vee S_x(D)) = (S_z(U) \wedge S_x(U)) \vee (S_z(U) \wedge S_x(D))$
- ❹ Analogia com números: distributividade da multiplicação relativa à adição.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

- ❺ **Só que** Nem $(S_z(U) \wedge S_x(U))$ e nem $(S_z(U) \wedge S_x(D))$ podem ser obtidos.
- ❻ A lei distributiva falha!
- ❼ Isso levou Garreth Birkhoff e John von Neumann a sugerirem (1936) que a lógica subjacente à MQ não poderia ser a clássica, originado o campo das **lógicas quânticas**.

Um exemplo: as duas fendas

- Situação que bem ilustra o uso da matemática.
- O experimento das duas fendas.



Suposições:

- 1 $\wp(A|B) = \frac{\wp(A \wedge B)}{\wp(B)}$ (probabilidade condicional de A dada a probabilidade de B)
- 2 $\wp(A1 \vee A2) = 1$ (passou por uma das fendas).

Um exemplo: as duas fendas

- 1 $\wp(A \cup B) = \wp(A) + \wp(B) - \wp(A \cap B)$, com $\wp(A \cap B) = 0$ se A e B forem eventos independentes (como é o caso).
- 2 Isto é, $\wp(A1 \cap A2) = 0$
- 3 $\wp(R|A1 \vee A2)$ (o que queremos calcular).
- 4 $\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R \wedge (A1 \vee A2))}{\wp(A1 \vee A2)}$
- 5 Aplica a lei distributiva: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

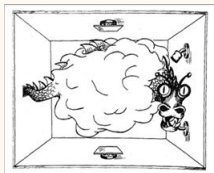
Um exemplo: as duas fendas

- 1 $\wp(A \cup B) = \wp(A) + \wp(B) - \wp(A \cap B)$, com $\wp(A \cap B) = 0$ se A e B forem eventos independentes (como é o caso).
- 2 Isto é, $\wp(A1 \cap A2) = 0$
- 3 $\wp(R|A1 \vee A2)$ (o que queremos calcular).
- 4 $\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R \wedge (A1 \vee A2))}{\wp(A1 \vee A2)}$
- 5 Aplica a lei distributiva: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- 6 $\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp((R \wedge A1) \vee (R \wedge A2))}{\wp(A1 \vee A2)}$ e considera (2).
- 7 $\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R \wedge A1) + \wp(R \wedge A2)}{\wp(A1 \vee A2)}$
- 8 $\wp(R \wedge A1) = \wp(R|A1) \times \wp(A1)$, de (1) da definição de probabilidade condicional: $\wp(A|B) = \frac{\wp(A \wedge B)}{\wp(B)}$, logo $\wp(A \wedge B) = \wp(A|B)\wp(B)$

Um exemplo: as duas fendas

- ❶
$$\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R|A1) \times \wp(A1)}{\wp(A1) + \wp(A2)} + \frac{\wp(R|A2) \times \wp(A2)}{\wp(A1) + \wp(A2)}$$
- ❷ Como $\wp(A1) = \wp(A2)$, então $\wp(A1) + \wp(A2) = 2\wp(A1) = 2\wp(A2)$
- ❸
$$\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R|A1) \times \wp(A1)}{2\wp(A1)} + \frac{\wp(R|A2) \times \wp(A2)}{2\wp(A2)}$$
- ❹
$$\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R|A1) \times \cancel{\wp(A1)}}{2\cancel{\wp(A1)}} + \frac{\wp(R|A2) \times \cancel{\wp(A2)}}{2\cancel{\wp(A2)}}$$
- ❺
$$\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{1}{2}\wp(R|A1) + \frac{1}{2}\wp(R|A2)$$
- ❻ Esse raciocínio clássico não se aplica à MQ. A lei distributiva não vale.
- ❼ A passagem
$$\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{\wp(R \wedge (A1 \vee A2))}{\wp(A1 \vee A2)} = \frac{\wp((R \wedge A1) \vee (R \wedge A2))}{\wp(A1 \vee A2)}$$
 não é lícita.

- $\wp(R|A1 \vee A2) = \frac{1}{2}\wp(R|A1) + \frac{1}{2}\wp(R|A2)$
- A derivação é inválida na MQ.
- O valor de $\wp(R|A1)$ **deveria depender** do que ocorre em $A2$, o que requer uma ação **não-local** para se saber se $A2$ está ou não aberta.
- **Copenhague:** Não tem sentido falar em $A1 \vee A2$ olhando isso como indicando que ela vai por um ou por outro slit. A teoria não diz nada sobre isso (dragão de Wheeler). Essas proposições não têm sentido físico.



As matrizes de Pauli

- ❶ Problema: como representar algo que pode assumir somente dois valores?
- ❷ Consideremos o spin de um elétron, m_s , que pode ser $m_s = 1/2$ ou $m_s = -1/2$.
- ❸ Qual seria a menor (de menor ordem) matriz que tem esses dois valores como **auto-vetores**? Uma resposta é:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- ❹ Mas para o espaço tridimensional uma só matriz não basta, pois o vetor que queremos representar tem componentes nos eixos X , Y e Z .
- ❺ Há três matrizes que satisfazem essa condição, descobertas por Wolfgang Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

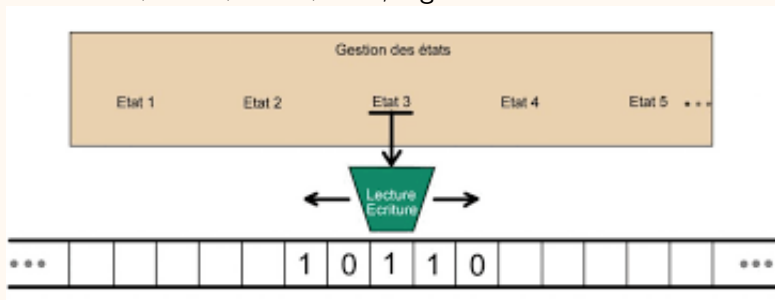
Wolfgang Pauli

(1900-1958) Discípulo de Bohr, trabalhou com a MQ, responsável pela descoberta do **Princípio de Exclusão**, que lhe deu o Prêmio Nobel em 1945.



- ❶ Iniciada nos anos 1980: implementar um computador "clássico" com sistemas quânticos.
- ❷ Muita dificuldade em usar computadores clássicos para processar problemas quânticos.
- ❸ Sugestão de uma **máquina quântica**, construída a partir de princípios quânticos.
- ❹ 1985 David Deutsch propôs um modelo (abstrato) de um computador quântico, uma **máquina de Turing** quântica.
- ❺ 1994 Peter Shor mostrou que um *computador quântico* seria muito mais rápido do que um comum. Descobriu como fatorar grandes números inteiros exponencialmente mais rápido.
- ❻ Atraiu a atenção. Dado um número enorme que é o produto de dois números primos, achar os dois fatores. Quebra de códigos bancários.

- 1 Na **teoria da computação** a unidade básica de informação é o **bit**, que pode ser 0 ou 1.
- 2 Representação binária: $5 = 1.2^0 + 0.2^1 + 1.2^2$, logo $5 = 101$.
 $15 = 1.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3$, logo $15 = 1111$



Meu nome em binário

Décio Krause

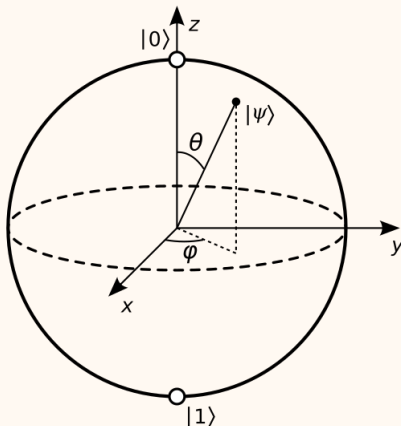
01000100 11000011 10101001 01100011 01101001 01101111
00100000 01001011 01110010 01100001 01110101 01110011
01100101

Link: [Conversor para binário](#)

- 1 Na **computação quântica** o esquema é diferente: temos os **qubits** (quantum bits).
- 2 Vamos chamar os dois estados básicos de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Podemos formar outros estados $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, sendo α e β números complexos (por exemplo, $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$).
- 3 Temos então uma enormidade de outras possibilidades, dependendo dos coeficientes α e β .
- 4 **Atenção:** Isso **não quer dizer** que o sistema **está em todas essas possibilidades ao mesmo tempo**.
- 5 Só temos **probabilidades**.

A esfera de Bloch

Para representar os qubits: os pontos da esfera (de raio unitário) são superposições dos vetores da base: $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. O vetor **pode estar** (depois da medição) **aqui** ou **acolá**, cada uma com uma certa probabilidade, mas não em todas as posições de uma vez.



Por que do formalismo?

- 1 A matemática dos egípcios e dos babilônios era bem avançada para problemas práticos.
- 2 Os gregos fizeram um avanço monumental: criaram uma **teoria**.
- 3 Euclides de Alexandria: os *Elementos* (de geometria).
- 4 Exposição axiomática.
- 5 Em física: 1900 Os 23 Problemas da Matemática (D. Hilbert).
- 6 Sexto problema: levar às outras ciências o que havia sido feito à matemática – tratamento axiomático.
- 7 **Idealmente**, uma teoria (ciências empíricas) é composta por uma base matemática (um "formalismo") e uma classe de estruturas, os **modelos** da teoria.
- 8 A base matemática comporta uma **lógica subjacente**, que determina as espécies de inferência que a teoria considera válidas.

- 1 Se queremos *entender* uma teoria, devemos conhecer seus princípios básicos e como, deles, podemos inferir outros princípios (logo, a sua **lógica**).
- 2 O método axiomático é o ideal para isso.
- 3 Em geral, assume-se a **lógica clássica** e uma **teoria de conjuntos** para expressar todos os conceitos dos quais necessitamos.
- 4 E também para definir os modelos da teoria (que via de regra são *conjuntos*).
- 5 Vimos os AXIOMAS da MQ, mas há outras formas de formulá-la, várias outras.
- 6 Ao que tudo indica, todas elas fornecem as mesmas explicações físicas.
- 7 A questão fundamental é entender o que uma teoria como a MQ nos diz sobre o mundo.
- 8 Essa é a questão das **interpretações**, que veremos na próxima aula.